

Лекция 1

Понятия вектора и линейного векторного пространства

05/09/2013

1 Обозначения

- $P \implies Q$: Если P , то Q .
- $P \iff Q$: P тогда и только тогда, когда Q ; P эквивалентно Q .
- $P \wedge Q$: P и Q .
- $P \vee Q$: P или Q .
- $x \in A$: x является элементом множества A ; x принадлежит A .
- $\{x \in A \mid P(x)\}$: множество элементов A , удовлетворяющих свойству P .
- $\{f(x_1, \dots, x_n) \mid P(x_1, \dots, x_n)\}$: множество результатов применения операции f ко всем $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющим P .
- $\forall x, P(x)$: $P(x)$ истинно для всех x .
- $\exists x, P(x)$: $P(x)$ истинно для некоторого x . Аналогично, $\forall x \in A, P(x)$ и $\exists x \in A, P(x)$ означают, что $P(x)$ истинно для всех (некоторых) x из A .
- $f : A \rightarrow B$: f — это функция с областью определения A и областью значений B .
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ — множества натуральных, целых, рациональных, и действительных чисел.

2 Отношения эквивалентности

Упорядоченная последовательность, или просто последовательность, элементов из множества A отличается от подмножества A тем, что в последовательности важен порядок элементов. Перестановка элементов дает другую последовательность, но не меняет подмножество. Упорядоченные последовательности длины n можно отождествить с функциями из $\{1, 2, \dots, n\}$ в A . Если s — такая функция, то соответствующая последовательность есть $(s(1), s(2), \dots, s(n))$. Будем заключать упорядоченные последовательности в круглые скобки: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Две последовательности равны, если равны их i -е элементы для всех i . В частности,

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 .$$

В отличие от этого, для равенства множеств мы имеем

$$\{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\} \iff (a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2) \vee (a_1 = b_2 \wedge a_2 = b_1) .$$

Декартово произведение множеств A и B , обозначаемое через $A \times B$, — это множество всевозможных упорядоченных пар, где первым элементом является элемент A , а вторым — элемент B , т.е.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} .$$

Множество $A \times A$ также обозначается через A^2 . Аналогично, A^n — это множество всех упорядоченных последовательностей длины n , состоящих из элементов A .

Отношение R между множествами A и B — это любое подмножество $A \times B$. Если $A = B$, то R называется отношением *на* A . Если $(x, y) \in R$, то часто пишут xRy по аналогии с такими отношениями, как $\leq$ и $<$. Заметим, что $f : A \rightarrow B$ можно рассматривать как частный случай отношения между A и B , обладающего следующим свойством: $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \implies y = z$, т.е. функция сопоставляет единственный элемент каждому аргументу.

Отношение R на множестве A называется отношением эквивалентности при выполнении следующих условий.

1. R рефлексивно, т.е. xRx для всех $x \in A$.
2. R симметрично, т.е. $xRy \implies yRx$ для всех $x, y \in A$.
3. R транзитивно, т.е. $xRy \wedge yRz \implies xRz$ для всех $x, y, z \in A$.

Примеры.

1. Отношение $<$ на множестве чисел не рефлексивно, не симметрично, но транзитивно. Отношение $\leq$ рефлексивно, не симметрично и транзитивно.
2. Отношение дружбы на множестве людей симметрично, но в общем случае не транзитивно.
3. Пусть R — отношение на множестве людей, такое что $xRy \iff x$ и y имеют одинаковый рост. Тогда R — отношение эквивалентности.
4. В общем случае, если $f : A \rightarrow B$, то $\{(x, y) \mid x, y \in A \wedge f(x) = f(y)\}$ является отношением эквивалентности. В пункте 3 функцией f является отображение, сопоставляющее каждому человеку его рост.
5. Однако утверждение пункта 4 в общем случае неверно, если f не функция, а произвольное отношение. Например, пусть xRy , если x — человек, y — язык (русский, английский и т.п.) и x знает y . Тогда $\{(x, y) \mid \exists z, xRz \wedge yRz\}$ — отношение, содержащее пары людей, могущих объясняться друг с другом. Такое отношение симметрично, но не обязательно транзитивно.
6. Отношение $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \wedge xy > 0\}$ на $\mathbb{Z}$ симметрично и транзитивно, но не рефлексивно. Однако оно является отношением эквивалентности на $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Этот пример показывает, что для установления рефлексивности важно, на каком множестве задано отношение.

Пусть R — отношение эквивалентности на множестве A . Тогда классом эквивалентности элемента $x \in A$ называется множество $\{y \in A \mid xRy\}$. Класс эквивалентности x обозначается через $[x]$. Таким образом, $y \in [x]$ по определению означает, что xRy .

Теорема 1.

1. Каждый элемент A принадлежит классу эквивалентности.
2. Классы эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.

Доказательство. 1. Пусть $x \in A$. Так как R рефлексивно, xRx , поэтому $x \in [x]$.

2. Пусть $[x]$ и $[y]$ пересекаются, т.е. существует $z \in A$, такой что $z \in [x]$ и $z \in [y]$. По определению класса эквивалентности, это означает xRz и yRz , а это по симметричности R влечет zRy . Чтобы доказать, что $[x]$ и $[y]$ совпадают, мы покажем, что каждый элемент $u \in [x]$ принадлежит также и $[y]$ и наоборот. Итак, пусть $u \in [x]$, т.е. xRu . По симметричности, uRx . Далее, используя xRz , zRy и применяя транзитивность два раза, мы получаем uRy , что по симметричности влечет yRu , т.е. $u \in [y]$. Тот факт, что каждый $u \in [y]$ принадлежит также и $[x]$, доказывается аналогично. ■

Идея доказательства предыдущей теоремы проста. Если R — отношение эквивалентности, то мы можем говорить, что элементы x и y связаны R , не заботясь о том, какой элемент идет первым, в силу симметричности. Тогда если классы эквивалентности x и y пересекаются, то у них есть некоторый общий элемент z , т.е. x , z и y связаны. Если же теперь есть еще некоторый $u \in [x]$, то u связан с x , а значит с z и y . Аналогично, любой $u \in [y]$ связан с x . Таким образом, все элементы в этих двух классах оказываются эквивалентными, т.е. это один класс.

Таким образом, множество A , на котором есть отношение эквивалентности, разбивается на непересекающиеся классы. Интуитивно, это соответствует взгляду на A с высоты, когда видны не отдельные элементы A , а только целые классы. Можно также сказать, что все элементы A определены “с точностью до R ”: нам не важен конкретный представитель класса, а только сам класс.

Например, пусть R определено на множестве студентов ННГУ следующим образом: xRy , если x и y принадлежат одной группе. Тогда R — отношение эквивалентности, и его классы — это группы. Это взгляд на множество студентов “с точностью до группы”.

3 Операции на классах эквивалентности и их корректность

Определение функции должно однозначно описывать, как аргументы преобразуются в результат. Есть ситуации, когда наиболее естественное описание такого преобразования включает выбор элемента из множества или использует объект, существование которого не очевидно. В этом случае необходимо доказать, что определение *корректно*, т.е. результат функции не зависит от выбора элемента, или что используемый объект действительно существует и единственен.

Приведем примеры некорректных определений функций. В каждом из них присутствует выбор, от которого зависит конечный результат.

1. $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x)$ есть первая цифра в десятичном представлении x . Вспомним, что некоторые числа имеют два представления: например, $1 = 0,999\dots$. Определение говорит, что $f(1) = 1$ и $f(0,999\dots) = 0$. Но тогда f отображает одно и то же число в два разных числа; следовательно, f не является функцией. Проблема заключается в том, что выбор разных представлений может привести к разным результатам.
2. Пусть¹ $g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $g(a/b, c/d) = (a + c)/(b + d)$. Тогда $f(1/3, 1/5) = 2/8 = 1/4$, но $f(2/6, 1/5) = 3/11 \neq 1/4$, несмотря на то, что $1/3 = 2/6$. Здесь проблема в выборе одного из многих представлений рационального числа в виде дроби; разные представления ведут к разным результатам.
3. (Пример использует материал последующий лекций.) Пусть $h(a, b, c)$ есть двойное векторное произведение векторов a , b и c в этом порядке, но без указания, какое из произведений: a на b или b на c , находится первым. Поскольку векторное произведение не ассоциативно, результат зависит от того, какая пара векторов умножается первой. В отличие от векторного произведения, произведение чисел или матриц ассоциативно, поэтому $h(x, y, z) = xyz$ является корректным определением даже без указания, какое из умножений xy или yz производится первым.

Операции на классах эквивалентности обычно определяют через уже известные операции на представителях этих классов. Поскольку в таких определениях присутствует выбор представителя, необходимо доказывать, что результат операции от него не зависит.

¹См. [Gowers's Weblog](#).

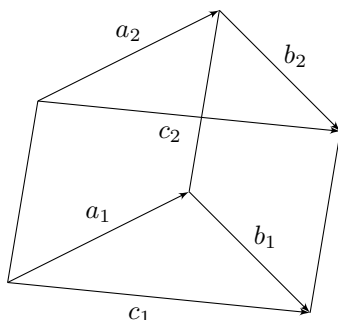
Рассмотрим пример. Пусть R — отношение на $\mathbb{Z}$, такое что $mRn \iff m-n$ четно. Легко проверить, что R — отношение эквивалентности с двумя классами: множествами четных и нечетных чисел. Пусть x и y — два класса (возможно, совпадающих). Определим $x + y$ следующим образом. Выберем $m \in x$ и $n \in y$; результатом операции будет $[m + n]$. Такое определение часто записывают так: $[m] + [n] = [m + n]$. Надо проверить, что результат не зависит от выбора m и n . Это следует из того, что четность суммы целых чисел зависит только от четности слагаемых, т.е., от их класса эквивалентности.

Посмотрим теперь, какой класс эквивалентности дает операция деления на два на представителях $[0]$, т.е. на классе четных чисел. Так, $[0/2] = [0]$. а $[2/2] = [1] \neq [0]$ несмотря на то, что и 0, и 2 принадлежат одному классу. Другими словами, четность результата деления на два зависит не от четности аргумента (а от остатка при делении на 4).

4 Векторы и операции над ними

См. [1, с. 1–4].

Сложение ненулевых свободных векторов a и b состоит из четырех шагов: (1) выбрать произвольный закрепленный вектор $a_1 \in a$, (2) отложить закрепленный вектор b_1 от конца a_1 , (3) получить закрепленный вектор c_1 , соединяющий начало a_1 с концом b_1 , и (4) вернуть $[c_1]$. Для проверки корректности этой операции, нужно те же шаги проделать с другим закрепленным вектором $a_2 \in a$ и сравнить получившиеся классы эквивалентности.



По определению равенства закрепленных векторов, четырехугольники, противоположными сторонами которых являются a_1, a_2 , а также b_1, b_2 , являются параллелограммами, откуда следует, что четырехугольник со сторонами c_1, c_2 — тоже параллелограмм, т.е. закрепленные векторы c_1, c_2 принадлежат одному классу эквивалентности. Для полноты, нужно проверить случай, когда a_2 коллинеарен a_1 и когда один или оба вектора a_1, b_1 равны нулю. Также нужно проверить корректность умножения вектора на число.

Список литературы

- [1] Ю.М. Смирнов. Лекции по аналитической геометрии для первого курса. — М. : МГУ, 1998.